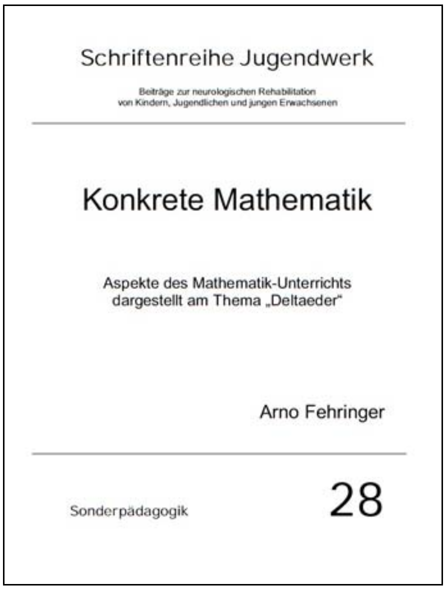
Schriftenreihe Jugendwerk, Heft 28
Download
Fehringer, Arno :
Konkrete Mathematik, Gailingen, 2008


Schriftenreihe Jugendwerk

Beiträge zur neurologischen Rehabilitation
von Kindern, Jugendlichen und jungen Erwachsenen

Konkrete Mathematik

Aspekte des Mathematik-Unterrichts
dargestellt am Thema „Deltaeder“

Arno Fehringer

Sonderpädagogik 28

Der Autor Arno Fehringer ist Gymnasiallehrer für Mathematik und Physik an der Krankenhausschule des Hegau-Jugendwerk Gailingen.

Das Hegau-Jugendwerk in Gailingen ist ein überregionales Rehabilitationszentrum für die neurologische Rehabilitation von Kindern, Jugendlichen und jungen Erwachsenen. Mit zur Zeit 200 Betten bietet es die ganze Rehabilitationskette von der noch intensivmedizinischen Frührehabilitation über alle Formen medizinischer, sozialer und schulischer Rehabilitation bis hin zur beruflichen Rehabilitation zum Beispiel in Form von Förderlehrgängen.
Die Schriftenreihe Jugendwerk ist ein in erster Linie internes Forum für die fachliche Auseinandersetzung mit den Fragen neurologischer Rehabilitation von Kindern, Jugendlichen und jungen Erwachsenen. Die einzelnen Hefte der Schriftenreihe stehen aber auch jederzeit allen externen Interessierten zur Verfügung und können als pdf-Datei von der Homepage des Hegau-Jugendwerks kostenfrei herunter geladen werden.

Hegau-Jugendwerk

Neurologisches Fachkrankenhaus und Rehabilitationszentrum Hegau-Jugendwerk
Kapellenstr. 31, 78262 Gailingen am Hochrhein

Telefon 07734 / 939 - 0
Telefax Verwaltung 07734 / 939 - 206
Telefax ärztlicher Dienst 07734 / 939 - 277
Telefax Krankenhausschule 07734 / 939 - 366
schriftenreihe@hegau-jugendwerk.de
www.hegau-jugendwerk.de

Redaktion der Schriftenreihe: Jörg Rinninsland, Wilhelm-Bläsig-Schule

Inhalt

Danksagung

Diese Schrift ist entstanden aus meiner langjährigen Tätigkeit als Gymnasiallehrer für die Fächer Mathematik und Physik an der Wilhelm-Bläsig-Schule, der Krankenhausschule des Neurologischen Rehabilitationszentrums Hegau-Jugendwerk in Gailingen. Die Veröffentlichung eines Teils meiner Erkenntnisse und Erfahrungen im Rahmen der „Schriftenreihe Jugendwerk“, verdanke ich der steten Überzeugungsarbeit meines Kollegen und Redakteurs der Schriftenreihe Jörg Rinninsland, der mich letztlich zu diesem Schritt bewog.

Einleitung

Ziel dieser Abhandlung ist es, in knappem Umfang darzustellen, auf welche Weise bei Schülern das Verständnis für Mathematik geweckt und gefördert werden kann, und zwar weitgehend unabhängig von den individuellen Voraussetzungen und dem jeweilig besuchten Schultyp. In diesem Sinne besitzen die aufgestellten Thesen Allgemeingültigkeit.

Anspruch dieser Schrift ist es nicht, ein umfassendes Bild des Mathematik-Unterrichts an einer Schule mit neurologisch mehr oder weniger beeinträchtigten Kindern und Jugendlichen zu vermitteln. Zwar finden in der Praxis dieser besonderen Lernumgebung Erkenntnisse der Neurodidaktik [Preiß [1], [2]] Anwendung, diese werden aber in der vorliegenden Schrift nicht explizit hervorgehoben. Entsprechendes gilt für spezielle didaktische Grundregeln.

Beim Erlernen und Verstehen von Mathematik ist vor allem auch das Wechselspiel zwischen der Handlung auf der konkreten Ebene mit entsprechendenden Materialien und der Tätigkeit auf der abstrakten Ebene unabdingbar. Dieses Wechselspiel soll am Thema „Deltaeder“ – das sind besondere geometrische Körper – dargestellt werden. Dass in der Praxis nicht immer der gesamte hier vorgestellte Stoff realisiert werden kann bzw. andere Ausprägungen oder Richtungen eingeschlagen werden, versteht sich von selbst. Außerdem möchte ich erwähnen, dass viele weitere Aspekte, wie etwa Symmetrie, Metrik, Topologie, Graphentheorie, Färbung hier nicht berücksichtigt werden. Diesbezüglich muss auf einschlägige Literatur, wie zum Beispiel das Buch von Cromwell verwiesen werden [Cromwell]. Streng mathematische Definitionen unterbleiben ebenfalls in diesem Rahmen.

Informationen zum Text

Mit Schüler, Schülergruppe, etc. sind immer Schüler und Schülerinnen gemeint. Die Abkürzung „WBS“ steht für Wilhelm-Bläsig-Schule.

Die seitlich links und rechts markierten Textabschnitte stellen zusätzliche Informationen teils sachlicher, teils historischer Natur, dar.

Fragen, Aufgabenstellungen und wichtige Aussagen oder Ausdrücke sind fett hervorgehoben.

Die untersuchten geometrischen Objekte werden mithilfe des Materials „Polydron“ der gleichnamigen britischen Firma gebaut, und es gibt in der vorliegenden Schrift auch eine entsprechende, auf einer Fotographie basierenden Abbildung. Jedoch ist zum besseren Verständnis des Lesers die Mehrheit der Abbildungen in kanonischer Weise gezeichnet.

Mathematisch besondere Objekte werden normalerweise mit den auf das Griechische zurückgehenden Namen benannt, welche sich auf die Anzahl der Flächen beziehen, obwohl die Verwendung von Phantasienahmen, die von der Gruppe kreiert werden, vorteilhaft sein kann. So wird zum Beispiel vom Tetraeder anstatt vom Vierflächner gesprochen.

Obwohl mathematische Aussagen oder Inhalte häufig untereinander in vielerlei Beziehung stehen können, diese also, bildlich gesprochen, untereinander „vernetzt“ sein können, ist die Darstellung in diesem Text in der üblichen Weise „linear“ strukturiert. Da die Inhalte aufeinander aufbauen, sollte zum besseren Verständnis des Lesers kein Kapitel übersprungen werden. Darüber hinaus wurde dieser Text vom Autor nach der These **„So ausführlich wie notwendig, und so knapp als möglich.“** kreiert.

Arno Fehringer, Oktober 2008

1 Mathematik-Unterricht an der Wilhelm-Bläsig-Schule

Im Rahmen der neurologischen Rehabilitation von schul- oder nicht mehr schulpflichtigen Kindern, Jugendlichen oder jungen Erwachsen hat selbstverständlich auch der Unterricht in Mathematik eine große Bedeutung. Die Lerngruppen sind relativ klein und können Schülerzahlen von 1 bis ca. 10 umfassen, wobei alters- und leistungsgerechte Zusammensetzungen angestrebt und realisiert werden. Auch ist eine gewisse Trennung entsprechend der Herkunftsschulen in Hauptschul-, Realschul-/Gymnasial- bzw. Oberstufen-Gruppen gegeben. Weniger leistungs- oder gruppenfähige Schüler werden separat im Rahmen des sogenannten Förderunterrichts gefördert. Der Rehabilitationsaufenthalt an der WBS kann zwischen wenigen Wochen und mehreren Monaten liegen. Details hierzu sind der Schrift „Die Wilhelm-Bläsig-Schule“, welche als Band 11 der Schriftenreihe erschienen ist, zu entnehmen.

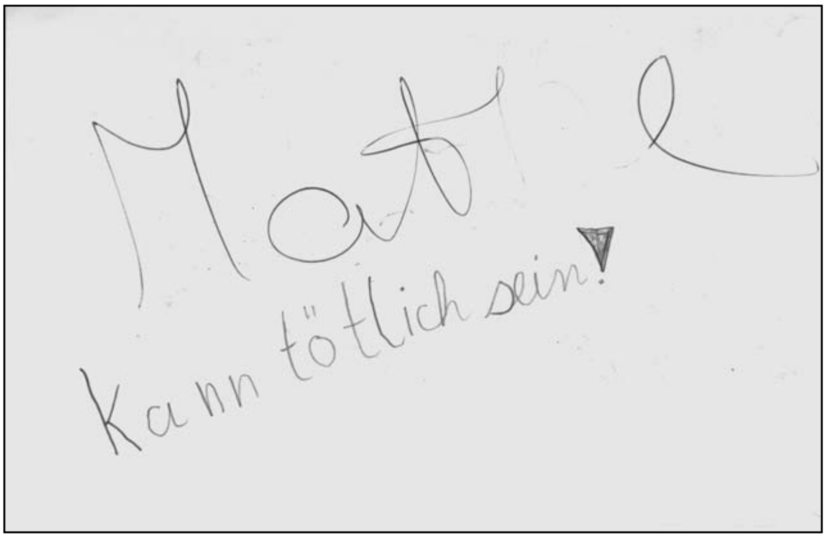
Die behandelten Themen sollen sich nicht nur auf den üblichen Stoff der Regelschulen beziehen, sondern müssen auch geeignet sein, mathematisches Grundlagenverständnis aufzubauen oder wiederherzustellen.

Mathematisches Verständnis erreicht man, einfach gesagt, dadurch, dass man Mathematik „macht“, statt sie nur anzuwenden.

Dieser Aspekt sollte unabhängig vom jeweiligen individuellen Leistungsvermögen und vom Niveau gelten und im Unterricht aller Schularten Beachtung finden. Was Mathematik „machen“ genau bedeutet, soll in dieser Schrift exemplarisch dargestellt werden. Auf Vollständigkeit wird notgedrungen verzichtet, da eine vollständige Darstellung den Rahmen sprengen würde.

2 Mathematik – ein fertiges Regelwerk?

Trotz des zu beobachtenden Umdenkens und der Wandlung bezüglich Auswahl und Darstellung von mathematischen Inhalten vor und nach der internationalen Vergleichsstudie über mathematische Schülerleistungen „PISA“ wird Mathematik in der überwiegenden Praxis leider immer noch so vermittelt, dass es in der Vorstellung der Lernenden als kompliziertes, mehr oder weniger fertiges Regelwerk erscheint. Begründungen, Schlussfolgerungen und Beweise haben nicht den Stellenwert, den sie eigentlich verdienten, und Mathematik wird nicht im Entstehen erlebt. Auch stoßen die wenigsten Schulbücher zum Kern der Mathematik vor, da sie eher buntbebilderten Aufgabensammlungen als Lehrbüchern gleichen. Mehr denn je verbinden Schüler Mathematik in erster Linie mit den Begriffen Zahlen, Rechnen und Formeln. „Bis zum Abitur wird eigentlich nur ausgerechnet, was irgendeine Textaufgabe, die irgendjemand sich ausgedacht hat, vorgibt.“ [Fahr [1]]. Die hohe Zahl der Nachhilfeschüler im Fach Mathematik zeigt, dass an deren mathematischem Verständnis – für welches Lehrer und Lehrplanmacher verantwortlich sind – etwas „faul“ ist. Mathematisches Verständnis wird selten gefragt, Beweise oder Begründungen (eine Ausnahme sind einfache Beweise zur Vollständigen Induktion) werden nicht verlangt und allenfalls vom Lehrer gegeben. Erwartet wird von Schülern schematisch-rezeptartiges Abarbeiten von Schulbuchaufgaben. Von Mathematik „machen“ kann hier kaum die Rede sein. Wen wundert es, dass solche Mathematik als langweilig und trocken empfunden wird.

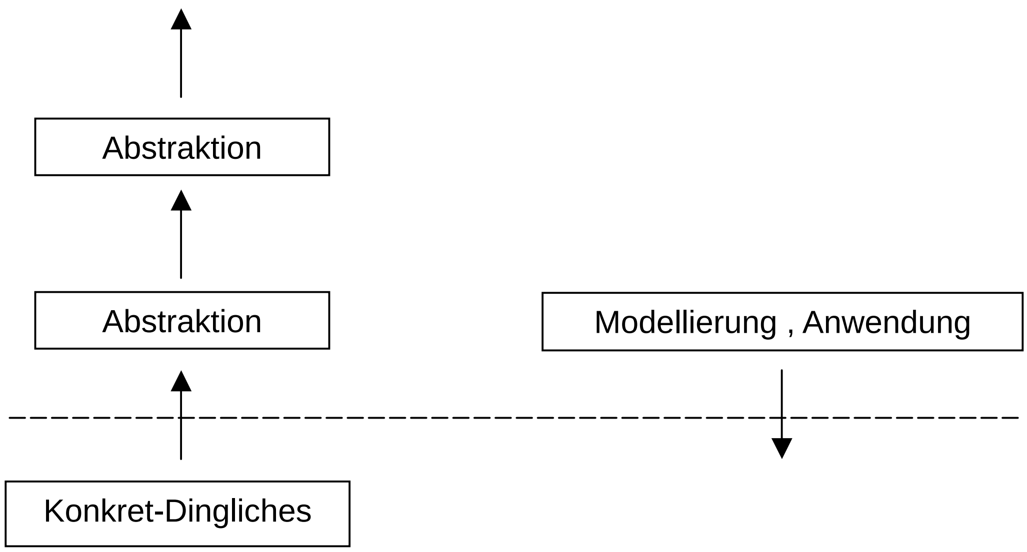


Graffiti eines Schülers der WBS

Um der Antwort auf die Frage, wie man Mathematik „macht“, näher zu kommen, ist es notwendig, zu umreißen, was Mathematik ist.

3 *Was ist Mathematik?*

Was Mathematik ist, kann weder in einem, noch in wenigen Sätzen gesagt werden! Sie gilt gemeinhin als abstrakte Wissenschaft. In der Tat spielt die Abstraktion, also das Ablösen vom Dinglichen, um das Allgemeine oder Wesentliche zu erfassen, eine der wichtigsten Rollen im mathematischen Prozess. Die mathematische Tätigkeit schlechthin findet im Abstrakten statt und lebt davon, Fragen zu stellen, Strukturen und Zusammenhänge aufzuspüren, darzulegen und zu beweisen, das heißt logisch aus Axiomen oder bereits gefundenen Sätzen abzuleiten. Der Mathematiker K. Devlin formuliert es noch knapper: „Mathematik ist die Wissenschaft von den Mustern“ [Devlin]. Dass solche mathematische Tätigkeit schwierig sein kann, versteht sich von selbst. Einen „Königsweg“ zur Mathematik gibt es meist nicht. Man benötigt hierzu unter Anderem Mut, Ausdauer, Gespür und Phantasie. Mathematik ist in diesem Sinne eine kreative Wissenschaft.
Eine weitere Tätigkeit besteht im Modellieren, das heißt in der Auswahl, Schaffung und Anwendung mathematischer Methoden zur Problemlösung im konkret-dinglichen Bereich. Die bloße Anwendung von Mathematik gehört z.B. in den Bereich der Ingenieurwissenschaften. Die folgende Skizze soll dies veranschaulichen:



Abstraktionsprozesse ergeben sich sowohl in der historischen Entwicklung als auch beim schöpferischen Tun von Mathematik. Der Weg vom Konkreten zum Abstrakten kann in mehreren Stufen erfolgen, die auch zeitlich mehr oder weniger weit, manchmal Jahrhunderte, auseinanderliegen können. Dies soll an einem Beispiel erläutert werden:

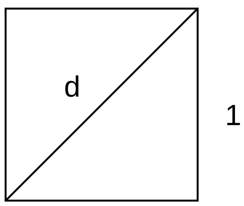
Der wichtigste Abstraktionsschritt war die Bildung des Begriffs der Zahl selbst. In der griechischen Antike, also vor etwa 2500 Jahren, ging man noch weiter und machte Zahlen zum Gegenstand der Untersuchung. Bekannt waren damals nur die natürlichen Zahlen

$$2, 3, 4, \ldots ,$$

die ihren Ursprung in der Einheit haben und sich daraus aufbauen. Die Einheit selbst war keine Zahl.
Bekannt war ebenfalls die Unterscheidung in gerade und ungerade Zahlen. Man brachte Zahlen in Verbindung mit geometrischen Figuren, woraus sich die sogenannten Figurierten Zahlen, also Dreieck-, Quadrat-, Rechteck- und allgemein Polygonalzahlen entwickelten, mit deren Hilfe grundlegende zahlentheoretische Sätze entdeckt wurden. Der griechische Mathematiker EUKLID (ca. 300 v. Chr.) trug in seinen „Elementen“, die 13 Bücher umfassen, das damals bekannte Wissen zusammen. Bekannt war auch der Begriff der Messbarkeit von Zahlen und Größen und die Proportionen [Euklid].

Zum Beispiel sind die Zahlen 10 und 14 messbar mit 2, denn $10 = 5 \cdot 2$ und $14 = 7 \cdot 2$
Die Zahlen 10, 14, 5, 7 genügen folgender Proportionsgleichung:
$10 : 14 = 5 : 7$

Griechische Mathematiker entdeckten jedoch auch nichtmessbare Größen:
„Die Diagonale und Seite des Einheitsquadrats sind nicht messbar “. [Euklid]

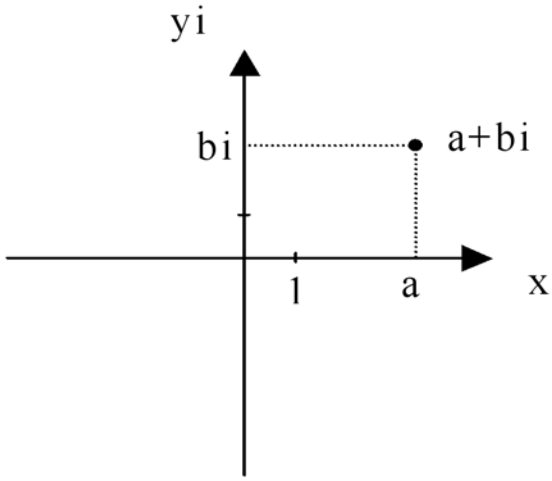


Das heißt: Für die Längen d und 1 gibt es keine Proportionsgleichung der Form d : 1 = a : b , wobei a und b natürliche Zahlen sind.
Die Existenz von nichtmessbaren Größen führte zu einer ersten Krise in der mathematischen Wissenschaft, da man nicht in der Lage war, einen adäquaten Abstraktionsschritt zu wagen. Die Nichtmessbarkeit von Diagonale und Quadratseite führt aus heutiger Sicht zu der reellen Zahl $\sqrt{2}$, welche keine Bruch- und demzufolge auch keine Dezimaldarstellung hat. An Pentagon und Pentagramm wurden ebenfalls nichtmessbare Größen entdeckt, was der irrationalen Zahl $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, der Zahl des sogenannten Goldenen Schnitts, entspricht. Wie G. CANTOR (1845-1918), der Begründer der Mengenlehre, gezeigt hat, gibt es tatsächlich viel mehr irrationale als rationale Zahlen! Die gesamte Problematik wurde erst in den letzten Jahrhunderten erfolgreich gelöst, indem man Zahlbereichserweiterungen nach folgender Hierarchie vornahm:

$$(N + * <) \subset (Z + -* <) \subset (Q + -* :<) \subset (R + -* :\wedge \log <) \subset (C + -* :\wedge \log \sqrt{\ })$$

Dabei bedeuten N, Z, Q, R und C die Mengen der Natürlichen, der Ganzen, der Rationalen, der Reellen und der Komplexen Zahlen, wobei die vorhergehende Zahlenmenge jeweils ganz in der nächsten enthalten ist. Die angeführten Rechenoperationen sind jeweils uneingeschränkt ausführbar. In der Menge der Komplexen Zahlen sind alle Operationen, nämlich Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzierung, Logarithmierung und Radizierung ausführbar. Alle Zahlenmengen, bis auf die Menge der Komplexen Zahlen, haben eine Anordnung, was durch das Kleinerzeichen angedeutet ist.

Jede komplexe Zahl entspricht einem Ausdruck der Form a+bi, wobei a und b reelle Zahlen und i = $\sqrt{-1}$, die so genannte imaginäre Einheit, sind. Die Menge der Komplexen Zahlen ist also etwas sehr Abstraktes, und kann nach dem Mathematiker C. F. GAUSS (1777-1855) in der sogenannten Gaußschen Zahlenebene veranschaulicht werden. Eine komplexe Zahl a+bi entspricht genau einem Punkt in der Ebene mit der reellen Koordinate a und der imaginären Koordinate bi.



Selbstverständlich kann man an diesem Beispiel die gesamte Tragweite von Abstraktionsprozessen in der Mathematik nicht erfassen. Die mathematische Wissenschaft stellt ein abstraktes „Universum“ dar, das ständig expandiert. Jedes Jahr werden mehr als 60 000 mathematische Arbeiten veröffentlicht, die jeweils mindestens einen neuen Satz enthalten. Es gibt mehrere tausend unterschiedliche mathematische Forschungsgebiete, wovon ein einzelner Mathematiker vielleicht zwei überblickt. [Beutelspacher]

4 Mathematisches Verständnis

Zum Verständnis von Mathematik gehört neben vielen anderen Fähigkeiten vor allem die der Abstraktion. Diese ist wohl Teil des menschlichen Erbes, „muss aber erworben werden, um sie zu besitzen“. (frei nach Goethe: Faust I).

Das bedeutet, dass man Lernende immer wieder mit Materialien, Bedingungen und Fragestellungen, die Abstraktionen herausfordern, konfrontieren muss.
Vom Lernenden erfordert das viel mehr Eigenaktivität als an Regelschulen üblich und möglich. Die Aktivität hat durchaus explorierenden Charakter, da der Schüler nicht von vornherein weiß, in welche Richtung er abstrahieren, welche Fragen er stellen soll. Spontane Ideen, Zufallsergebnisse aber auch Fehlschläge oder zeitraubende Umwege sind hier unabdingbar, so dass neben dem materiellen Rahmen auch ein angemessener zeitlicher Rahmen

notwendig ist.

Mathematisches Verständnis kann man sich letztlich nur selbst aneignen. Hierzu sagt E. CH. Wittmann (zitiert nach [Gruß; Spiegel]):

„1. Mathematisches Wissen kann man nicht vermitteln, Verstehen kann man nicht lehren.
2. Wissen kann nur vom Schüler erworben werden und Verständnis nur von ihm selbst aufgebaut werden.
3. Bei dem Erwerb von Wissen und dem Aufbau von Verständnis kann der Lehrer Hilfestellung leisten. „Hilfen“ sind aber prinzipiell zweischneidig. Auch in der besten Absicht gegebene Hilfen können das Verständnis behindern, wenn nicht sogar verhindern.“

5 Wie „macht“ man Mathematik?

Wie bereits dargelegt wurde, kann der Ausgangspunkt der Mathematik im Konkret-Dinglichen liegen, muss aber von dort aus ins Abstrakte führen. Nach dem Mathematiker A. N. Whitehead (1904-1960) „ist es wichtig, dass jedes Fachgebiet in abstrakter und konkreter Form gut präsentiert wird. Beide Seiten sind wünschenswert, weil wir in abstrakter Form lernen, aber in konkreter Form fühlen. Die Kunst ist es, Abstraktes konkret werden zu lassen und Konkretes abstrakt formulieren zu können.“ (nach [Fahr [2]]). **Um in dieser Weise arbeiten, lehren und lernen zu können, benötigt man erstens Zeit und zweitens geeignetes Material.** Beides ist an der WBS gegeben!

Der zeitliche Rahmen des Mathematik-Unterrichts an der WBS ist bedingt durch die Wochenstundenzahl von 5 bis maximal 8 Stunden sowie die Aufenthaltsdauer. Bei kurzen Aufenthalten können Kontinuität, Effektivität und Nachhaltigkeit von Unterrichtsinhalten selbstverständlich beeinträchtigt sein. Bei längeren ist dies weniger der Fall. Ideale Voraussetzungen gibt es auch an einer Krankenhausschule nicht!

Der materielle Rahmen besteht aus einer Vielfalt von mehr oder weniger einfachen, im Handel oder Lehrmittelhandel zu beziehenden Materialien, die im Unterricht Einsatz finden. Einfache Materialien sind z.B. 30 cm lange und 3 mm dicke, zylindrische Holzstäbe (als Repräsentanten von Geraden) zur Untersuchung der Frage, wie viele Schnittpunkte eine bestimmte Anzahl von Geraden in einer gege-

benen Ebene haben können.
Zu den komplizierteren Materialen gehört z.B. der Baukasten „**Polydron**“ der gleichnamigen britischen Firma, welches aus Plastikteilen in Form von regulären 3-, 4-, 5-, 6-, 8-, und 10 Ecken besteht, und die unter Anderem zum Bau von regulären oder nichtregulären Polyedern (Vielflächnern) verwendet werden können. Dass jedes Material auch Einschränkungen bezüglich der Handhabbarkeit hat, ist klar. Jedoch liefern manchmal auch Schüler mit stark eingeschränkter Handmotorik erstaunliche Ergebnisse.

Die Arbeit mit dem Material erlaubt die Ausbildung und Förderung von Qualitäten bzw. Vorgehensweisen unterschiedlicher Art, zum Beispiel :

1. Zählen und geeignete Zählstrategien

2. Erkennung von Mustern

3. Ordnen und Klassifizieren

4. Fähigkeiten der „Eingangsseite“ wie Beobachtung, Wahrnehmung und Konzentration

5. Fähigkeiten der „Ausgangsseite“ wie Raumvorstellung, Phantasie und Kreativität

6. Wechsel von der konkreten zur abstrakten Ebene und wieder zurück

Geometry is a skill of the eyes
and the hands as well as of mind.

J. Pederson,
Professor of Mathematics at
Santa Clara University

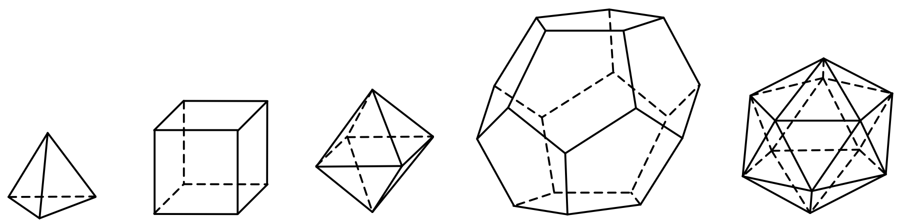
6 Bauen mit „Polydron“ am Beispiel der Deltaeder

Im Folgenden sollen mit Hilfe des Materials „Polydron“ schrittweise die konvexen Deltaeder erzeugt werden. Was sind Deltaeder?

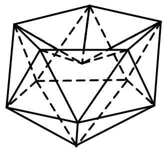
6.1 Deltaeder

Seit dem Altertum sind die sogenannten **5 Platonischen Körper** bekannt, nämlich Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder (PLATON: 427-347 v. Chr.). Der griechische Mathematiker EUKLID (um 300 v. Chr.) zeigte in Buch XIII seiner „Elemente“, dass es nur diese fünf regelmäßigen Körper geben kann.

Die Namen gehen auf das Griechische zurück, und beziehen sich auf die jeweilige Flächenzahl. Das Tetraeder etwa bedeutet Vierflächner, da es durch vier Dreiecke begrenzt wird. Unter den Platonischen Körpern haben wir also jeweils einen 4-, 6-, 8-, 12- und 20-Flächner.



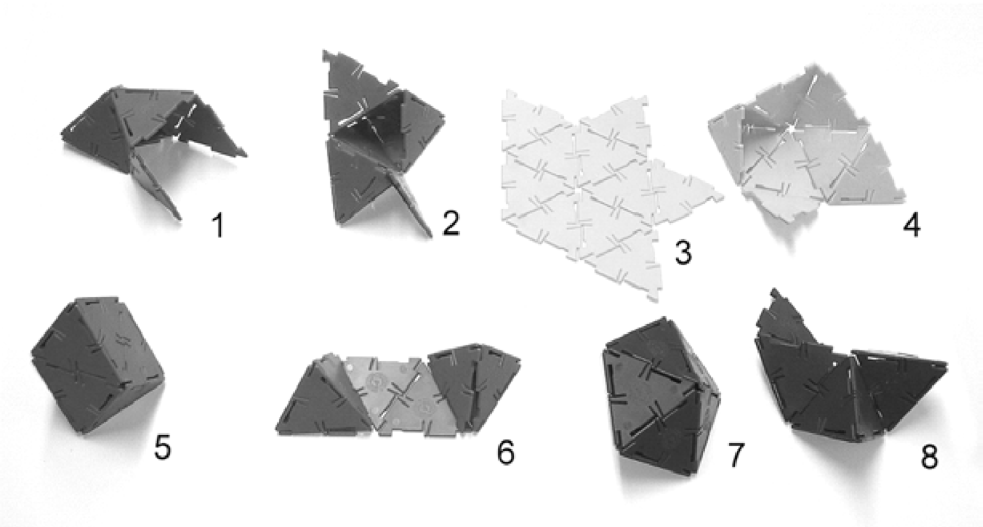
Die Bezeichnung „regelmäßig“ bedeutet, dass an jeder Ecke gleich viele kongruente regelmäßige Vielecke zusammenstoßen, (die Ecken also gleiche Zähligkeit aufweisen), und dass der Körper konvex ist, also keine Einbuchtungen aufweist, wie zum Beispiel der durch „Einstülpen“ des Ikosaeders entstandene Körper.



Interessant ist, dass es neben den 3 Platonischen Körpern, welche aus regelmäßigen Dreiecken aufgebaut sind, weitere, allerdings etwas weniger reguläre konvexe Körper gibt, falls man auch unterschiedliche Eckenzähigkeit zulässt.
Konvexe Körper, deren Oberflächen ausschließlich aus gleichseitigen Dreiecken gebildet werden, zwei nebeneinanderliegende Dreiecke nicht in einer Ebene liegen, heißen **Deltaeder**. Ihre Benennung erfolgte nach dem griechischen Buchstaben Delta (Δ), der die Form eines Dreiecks besitzt. Insgesamt gibt es nur 8 konvexe Deltaeder, was später noch gezeigt werden wird.

6.2 Der Einstieg – offene und geschlossene Objekte

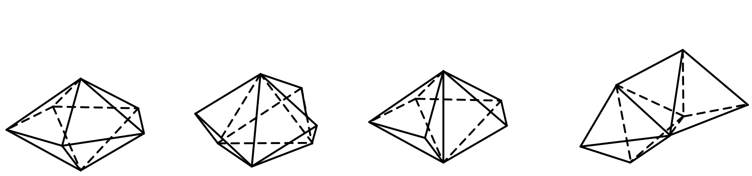
Der Einstieg in die Arbeit kann mehr oder weniger offen sein, so dass man hernach weitere einschränkende oder je nach Betrachtung besondere Bedingungen vorgeben kann. Die an eine Schülergruppe gestellte Aufgabe, **aus genau 10 Dreiecken eine Objekt zu bauen**, könnte folgendes Ergebnis liefern:



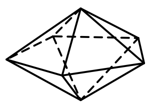
Die Kreationen erlauben eine erste Einteilung in offene und geschlossene Körper. Die Objekte mit den Nummern 5 und 7 sind geschlossen und die anderen offen. Man kann sie als **10-Deltaeder** bezeichnen, da sie aus 10 Dreiecken aufgebaut sind.
Die Frage ist nun, **ob es außer diesen beiden 10-Deltaedern noch weitere gegeben kann?**

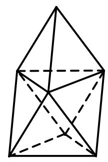
6.3 Die 5 Deltaeder aus 10 Dreiecken

Es gibt sogar vermutlich insgesamt fünf 10-Deltaeder (was gezeigt werden müsste), die von den Schülern durch mehr oder weniger systematisches Experimentieren gefunden werden können.

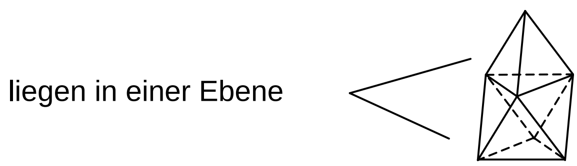


Die links und rechts stehenden Körper heben sich dadurch hervor, dass sie im Gegensatz zu den anderen keine einspringenden Ecken bzw. Kanten aufweisen. Sie sind also konvex.

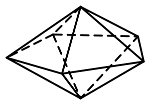




Der rechte der beiden Körpern ist nicht konvex im strengen Sinn, da er aneinandergrenzende Dreiecke besitzt, welche in einer Ebene liegen:



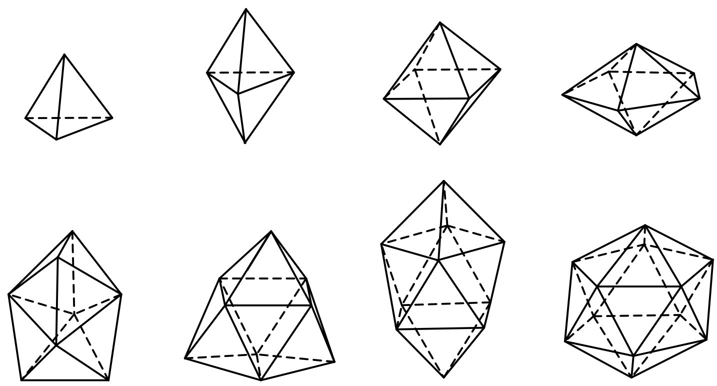
Der einzige konvexe 10-Deltaeder ist also die so genannte Pentagonale Dipyramide.



Auf diese Weise kann man fortfahren, indem man untersucht, **welche konvexen Deltaeder man aus weniger bzw. mehr als 10 Dreiecken erzeugen kann**.

6.4 Konvexe Deltaeder

Beim Bauen merkt man, dass konvexe Deltaeder nur mit einer geraden Anzahl von Dreiecken erzeugt werden können, genauer gesagt mit 4, 6, 8, 10,... Dreiecken, und dass eine Ecke immer aus 3, 4 oder 5 Dreiecken gebildet wird. Ecken aus mehr als 5 Dreiecken verletzen die Konvexität. Man findet im Wesentlichen die folgend dargestellten Körper, wobei drei Platonische Körper darunter sind:



Diese können nun auf weitere Eigenschaften, etwa auf die Anzahl ihrer Ecken, Kanten und Flächen, E, K, F untersucht werden, was zähltechnisch durchaus eine Herausforderung darstellt, da die Zählung am Körper erfolgt. Die Daten nebst den entsprechenden Namen für die Körper sind in der folgenden Tabelle festgehalten:

Ecken E	Kanten K	Flächen F	Name
4	6	4	Tetraeder
5	9	6	trigonale Dipyramide
6	12	8	Oktaeder
7	15	10	pentagonale Dipyramide
8	18	12	erweiterte pentagonale Dipyramide
9	21	14	tripyramidales trigonales Prisma
10	24	16	dipyramidales tetragonales Antiprisma
12	30	20	Ikosaeder

Sucht man nach Mustern in dieser Tabelle, fällt auf, dass in der Spalte der Flächenzahlen F = 18 nicht vorkommt. Das heißt, die Folge der Flächenzahlen wächst von 4 aus in 2er-Schritten bis zur 16 und springt dann auf 20. Eine entsprechende Irregularität ist bei den Folgen der Ecken- und Kantenzahlen feststellbar. Ansonsten wachsen die Folge der Ecken- und Kantenzahlen in 1er-bzw. in 3er-Schritten.
Schaut man sich die drei Zahlen E, K, F in den Zeilen der Tabelle an, kann man feststellen, dass K immer die Größte von den drei Zahlen ist. Genauer gilt die Beziehung:

$$E \leq F < K$$

Dies gibt Anlass zu weiteren Fragen, von denen die meisten im Rahmen dieser Schrift beantwortet werden :

Gibt es eine Begründung dafür, dass F immer gerade ist?

Wie kann man das Wachstum der Folgen für E, K, F erklären?

Gibt es keinen konvexen 18-Deltaeder oder hat man ihn nicht gefunden?

Ist diese Tabelle fortsetzbar, das heißt , gibt es auch (konvexe) Deltaeder für die F > 20 gilt?

Gibt es noch mehr als die gefundenen konvexen Deltaeder?

Der mathematisch bedeutendste Zusammenhang liegt in der Tatsache, dass bei jedem Deltaeder die Summe aus Ecken- und Flächenzahl die Kantenzahl um 2 übertrifft:

$$E + F = K + 2$$

Dies ist die bekannte, auf den Schweizer Mathematiker LEONARD EULER (1707 - 1783) zurückgehende Polyederformel, die allerdings meist in der Form

$$\boxed{E - K + F = 2}$$

geschrieben wird. Sie gilt nicht nur für die Deltaeder, sondern für jedes Polyeder, also auch etwa die Platonischen und Archimedischen Körper. Archimedische Körper bestehen aus Vielecken unterschiedlicher Art. Euler selbst hat keinen Beweis für diese Formel geliefert. In seiner Arbeit „Elementa Doctrinae Solidorum“ von 1750 gibt er zu, dass er nicht in der Lage war, einen stichhaltigen Beweis für diese Formel zu finden.

Wie kann man die Eulersche Formel beweisen?

Heute kennt man viele Beweise für die Eulersche Polyederformel. Eine Begründung oder einen Beweis, der konkrete und abstrakte Elemente enthält, wir nun vorgestellt.

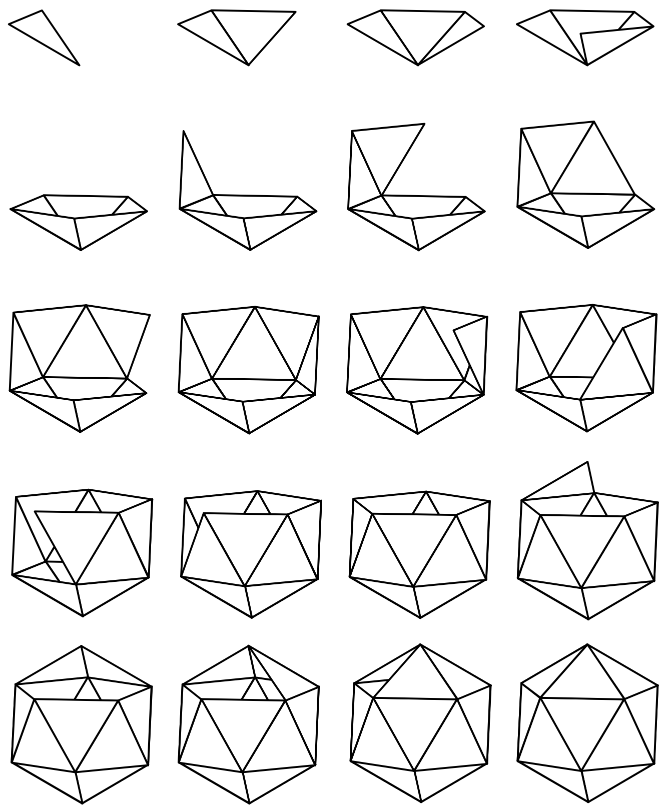
6.5 Beweis der Eulerschen Polyederformel

Von der Richtigkeit der Eulerschen Polyederformel kann man sich auf anschauliche Weise überzeugen: Baut man einen Deltaeder, z.B. den Ikosaeder, schrittweise auf, beginnt man mit einem Dreieck. Das vorliegende Gebilde besitzt dann 3 Ecken, 3 Kanten und 1 Fläche, so dass die Eulersche Formel den Wert 1 liefert:

$$E - K + F = 3 - 3 + 1 = 1$$

Fügt man ein weiteres Dreieck an, so erhält man 4 Ecken, 5 Kanten und 2 Flächen. Die Eulersche Formel hat wiederum den Wert 1:

$$E - K + F = 4 - 5 + 2 = 1$$



Den Aufbau des Ikosaeders kann man anhand der dargestellten Bilderfolge schrittweise verfolgen. Dabei wird Zeile für Zeile von links nach rechts gelesen. Die jeweils vorhandenen Ecken-, Kanten- und Flächenzahlen und den Wert für die Eulersche Formel kann man in einer Tabelle festhalten:

Ecken E	Kanten K	Flächen F	E - K + F =
3	3	1	1
4	5	2	1
5	7	3	1
6	9	4	1
6	10	5	1
7	12	6	1
8	14	7	1
8	15	8	1
9	17	9	1
9	18	10	1
10	20	11	1
10	21	12	1
11	23	13	1
11	24	14	1
11	25	15	1
12	27	16	1
12	28	17	1
12	29	18	1
12	30	19	1
12	30	20	2

Warum die Eulersche Formel bei diesem Prozess praktisch immer gleich 1 ist, zeigt die folgende Betrachtungsweise:

Ein Dreieck kann man auf genau zwei Arten anfügen, nämlich

(1) mit einer Kante, dann kommen 1 Ecke und 2 Kanten hinzu,
(2) mit zwei Kanten, dann kommen 0 Ecken und 1 Kante hinzu

Hat man nun während der Aufbauphase einen Körper mit E Ecken, K Kanten und F Flächen, für den die Formel $E - K + F = 1$ gilt, so ist für den um ein Dreieck ergänzten Körper in beiden Fällen der Wert der Eulerschen Formel ebenfalls 1 :

(1) $(E+1) - (K+2) + (F+1) = E + 1 - K - 2 + F + 1 = E - K + F = 1$,
(2) $E - (K+1) + (F+1) = E - K - 1 + F + 1 = E - K + F = 1$

Nur wenn das letzte Dreieck eingefügt wird, bleiben die Ecken- und Kantenzahl konstant und die Flächenzahl ändert sich um 1 mit der Konsequenz, dass die Eulersche Formel nun den Wert 2 annimmt.

Ähnliche Betrachtungsweisen kann man zum Beweis der Eulerschen Formel für andere Polyeder, wie zum Beispiel die Platonischen und Archimedischen Körper, heranziehen

Damit ist der Beweis erbracht.

6.6 Alle Deltaeder haben gerade Flächenzahlen

Man denkt sich F kongruente gleichseitige Dreiecke gegeben, die zu einem Deltaeder mit der Flächenzahl F zusammenbaut werden können. Jedes dieser Dreiecke hat 3 Kanten, und alle F Dreiecke besitzen dann zusammen $3F$ Kanten. Beim Zusammenbau werden jeweils 2 Kanten zu 1 Kante vereinigt, so dass der fertige Deltaeder nur die Hälfte der Kantenzahl, also $\frac{3F}{2}$ Kanten besitzt. Die Zahl $\frac{3F}{2}$ ist aber nur ganz, wenn F eine gerade Zahl ist.

Eine etwas andere Betrachtungsweise beim Körper ist das sogenannte „Zählen der Kanten über die Flächen“:
Zählt man von jeder der F Flächen aus die Kanten, so bekommt man zunächst die Anzahl 3F. da bei dieser Zählweise aber jede Kante zweimal erfasst wird, ist die der doppelten Kantenzahl, also

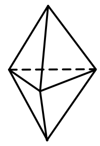
$$3F = 2K$$

Auch diese Gleichung kann nur richtig sein, wenn F eine gerade Zahl ist.

6.7 Es gibt kein Konvexes Deltaeder mit 18 Flächen

Der Beweis für diese Aussage kann auf der algebraischen Ebene über ein System von 4 Gleichungen mit 6 Variablen geführt werden. Bevor man damit beginnen kann, muss noch einige theoretische Vorarbeit geleistet werden.

Wie man beim Bau der konvexen Deltaeder gesehen hat, können die Ecken eines solchen Körpers unterschiedliche Zähligkeit haben. Die trigonale Dipyramide, zum Beispiel, hat insgesamt E = 5 Ecken, es gibt 2 Ecken mit der Zähligkeit 3, 3 Ecken mit der Zähligkeit 4, und 0 Ecken mit der Zähligkeit 5.



Um diesen Sachverhalt mathematisch knapp darstellen zu können, empfiehlt sich eine besondere Schreibweise:

Die Anzahl der Ecken mit der Zähligkeit 3 bezeichnet man mit E_3, die Anzahl der Ecken mit der Zähligkeit 4 mit E_4 und die Anzahl der Ecken mit der Zähligkeit 5 mit E_5. Für die trigonale Dipyramide können wir also schreiben:

$$E_3 = 2 \qquad E_4 = 3 \qquad E_5 = 0,$$

Allgemein gilt für ein Deltaeder mit den Zahlen E_3 , E_4 , E_5 entsprechend der Anzahl der Eckenausprägungen die Gleichung

$$E_3 + E_4 + E_5 = E$$

Man kann nun bei einem Deltaeder mit $E_3 + E_4 + E_5 = E$ Ecken, ähnlich wie vorhin, „die Kanten von den Ecken aus zählen", so dass man ebenfalls die doppelte Kantenzahl erhält. Es gilt also eine weitere Gleichung:

$$3E_3 + 4E_4 + 5E_5 = 2K$$

Um noch mehr Übersicht zu bekommen, stellen wir für ein gegebenes konvexes Deltaeder alle gültigen Gleichungen auf und nummerieren diese durch:

I. $E_3 + E_4 + E_5 = E$

II. $3E_3 + 4E_4 + 5E_5 = 2K$

III. $3F = 2K$

IV. $E - K + F = 2$

Mit F = 18 ergibt sich aus III. K = 27 und aus IV. E = 11

Setzt man diese Werte in I. und II. ein, erhält man:

V. $E_3 + E_4 + E_5 = 11$

VI. $3E_3 + 4E_4 + 5E_5 = 54$

Die Gleichung VI. schreibt man in der Form

$$3E_3 + 3E_4 + 3E_5 + E_4 + 2\,E_5 = 54$$

und erhält dann nach einsetzen von Gleichung V.

$$33 + E_4 + 2\,E_5 = 54$$

was vereinfacht wird zu

VII. $E_4 + 2\,E_5 = 21$

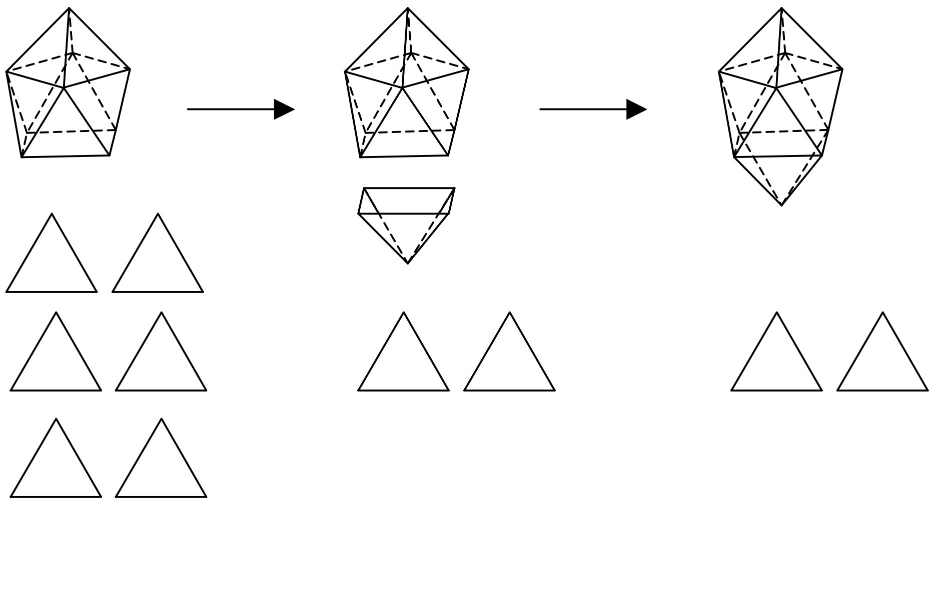
Da nach Gleichung V. E_4 , E_5 < 11 gilt, hat Gleichung VII. nur folgende 5 Lösungen:

E_4	E_5
1	10
3	9
5	8
7	7
9	6

Jedoch erfüllt nur das erste Lösungspaar 1, 10 auch Gleichung V. , und daraus folgt, dass $E_3 = 0$ ist. Alle anderen Lösungspaare liefern für E_3 negative Werte, was natürlich unmöglich ist.

Wir können also festhalten, dass aufgrund algebraischer Notwendigkeiten, ein Deltaeder mit F = 18 Flächen genau eine 4-zählige Ecke und zehn 5-zählige Ecken haben muss.

Hätte man nun 18 Dreiecke und würde mit 4 dieser Dreiecke eine 4-zählige Ecke bilden, und würde man an diese 4 Dreiecke weitere Dreiecke anhängen, so dass die jeweils entstehenden Körperecken 5-zählig sind, erhielte man zunächst folgende, an eine „Bischofsmütze“, erinnernde Figur, die aus 12 Dreiecken besteht und unten eine viereckige Öffnung hat:



Um die 5-Zähligkeit der 4 unteren Ecken an der Öffnung zu erreichen, müsste man weitere 4 Dreiecke in Form einer Pyramide hinzufügen mit dem Effekt, dass der entstandene Körper erstens anstatt 18 nur 16 Dreiecke hat und zweitens sogar zwei 4-zählige Ecken aufweist. Für die beiden übrig gebliebenen Dreiecke gäbe es schließlich keine Verwendung.

Damit ist der Beweis erbracht, dass es keinen konvexen 18-Deltaeder gibt.

6.8 Es gibt keine konvexen Deltaeder mit mehr als 20 Flächen

Nehmen wir zunächst an, es gäbe einen Körper mit $F > 20$ Flächen , mit E Ecken und K Kanten. Er sei so aufgebaut, dass er E_3 Ecken mit der Zähligkeit 3, E_4 Ecken mit der Zähligkeit 4 und E_5 Ecken mit der Zähligkeit 5 besitze. Dann gelten die vorigen Gleichungen I., ... IV. :

I. $E_3 + E_4 + E_5 = E$

II. $3E_3 + 4E_4 + 5E_5 = 2K$

III. $3F = 2K$

IV. $E – K + F = 2$

Multipliziert man Gleichung IV. mit 6 durch und ersetzt man den Term für 2K aus Gleichungen III. in Gleichung IV. ein, so erhält man:

$$6E - 6K + 6F = 12$$

$$6E - 6K + 4K = 12$$

$$6E - 2K = 12$$

Setzt man nun weiter die Terme für E und 2K aus Gleichung I. und II., so erhält man weiter

$$6E - 2K = 12$$

$$6(E_3 + E_4 + E_5) - (3E_3 + 4E_4 + 5E_5) = 12$$

$$6E_3 + 6E_4 + 6E_5 - 3E_3 - 4E_4 - 5E_5 = 12$$

$$3E_3 + 2E_4 + 1E_5 = 12$$

Nun ersetzt man den Term für E_5 aus Gleichung I. und erhält

$$3E_3 + 2E_4 + 1E_5 = 12$$

$$3E_3 + 2E_4 + E - E_3 - E_4 = 12$$

$$2E_3 + E_4 + E = 12$$

$$2E_3 + E_4 = 12-E$$

Man kann leicht zeigen, dass falls $F > 20$, dann ist $E > 12$. Daraus folgt aus der letzten Gleichung, dass

$$2E_3 + E_4 < 0$$

ist, was jedoch einen Widerspruch zu der Voraussetzung darstellt, wonach
E_3 , $E_4 > 0$ ist.

Damit ist der Beweis erbracht, dass es keine konvexen Deltaeder mit $F > 20$ geben kann.

6.9 Es gibt höchstens 8 konvexe Deltaeder

Zum Schluss kommen wir zu der Frage nach der Maximalzahl der konvexen Deltaeder. Die Antwort erhält man wieder aus der Betrachtung des Gleichungssystems I., ..., IV. :

I. $E_3 + E_4 + E_5 = E$

II. $3E_3 + 4E_4 + 5E_5 = 2K$

III. $3F = 2K$

IV. $E - K + F = 2$

Wie bereits gezeigt, kommen für die Anzahl der Flächen nur die Werte
F = 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 20 in Frage.
Mit Hilfe der Gleichungen III. und IV. erhält man daraus den entsprechenden Wert für die Ecken :

$$E = \frac{1}{2}F + 2$$

Setzt man den so erhaltenen Wert für E in Gleichung I. und den Wert für 2K in Gleichung II. ein so erhält man die Gleichungen V. und VI. :

V. $E_3 + E_4 + E_5 = \frac{1}{2}F + 2$

VI. $3E_3 + 4E_4 + 5E_5 = 3F$

Die Aufgabe ist nun, die Gleichungen V. und VI. für alle möglichen Werte von F, nämlich F = 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 20, zu lösen. Da dies eine sehr umfangreiche Aufgabe ist, beschränken wir uns exemplarisch auf den Wert F = 10. Dann erhält man aus den Gleichungen V. und VI. die entsprechenden Gleichungen:

$$E_3 + E_4 + E_5 = 7$$

$$3E_3 + 4E_4 + 5E_5 = 30$$

Die obere Gleichung hat folgende Lösungstripel, die in den ersten drei Spalten der folgenden Tabelle dargestellt sind. Daneben stehen die sich ergebenden Werte der unteren Gleichung :

E_3	E_4	E_5	$3E_3+4E_4+5E_5 =$
7	0	0	21
6	1	0	22
6	0	1	23
5	2	0	23
5	1	1	24
5	0	2	25
4	3	0	24
4	2	1	25
4	1	2	26
4	0	3	27
3	4	0	25
3	3	1	26
3	2	2	27
3	1	3	28
3	0	4	29
2	5	0	26
2	4	1	27
2	3	2	28
2	2	3	29
2	1	4	30
2	0	5	31
1	6	0	27
1	5	1	28
1	4	2	29
1	3	3	30
1	2	4	31
1	1	5	32
1	0	6	33
0	7	0	28
0	6	1	29
0	5	2	30
0	4	3	31
0	2	5	33
0	1	6	34
0	0	7	35

Man erkennt, dass beide Gleichungen nur erfüllt werden von den folgenden drei Tripeln für die Variablen E_3 , E_4, E_5 :

E_3	E_4	E_5
2	1	4
1	3	3
0	5	2

Um die Existenz entsprechender Körper zu überprüfen, kann man bauen!

Das erste Lösungstripel entspräche einem Körper mit E_3 = 2, E_4 =1 und E_5 =4. Startet man beim Bau dieses Körpers mit der 4-zähligen Ecke, bekommt man einen (beweglichen) Mantel einer 4-seitigen Pyramide. An den vier unteren Ecken des Mantels kann, nach hinzufügen eines weiteren Dreiecks, höchstens eine 3-zählige Ecke entstehen. Man hat jetzt eine trigonale Dipyramide mit einer dreieckigen Öffnung. Würde man diese durch eine weiteres Dreieck schließen, hätte man noch 4 Dreiecke übrig.

Versucht man am Rand der offenen trigonalen Dipyramide 5-zählige Ecken zu erzeugen, bekommt man einen geschlossenen Körper in Form einer trigonalen Dipyramide mit aufgesetztem Deltaeder, also einen Körper, der nicht konvex ist.

Bei einem neuen Bauversuch startet man wieder mit der 4-zähligen Ecke, bekommt also den (beweglichen) Pyramidenmantel. Versucht man nun am unteren Rand des Mantels lauter 5-zählige Ecken zu konstruieren, bräuchte man mindestens 8 weitere Dreiecke anstatt der noch übrigen 6 Dreiecke, um dann die an eine „Bischofsmütze“ erinnernde Figur mit viereckiger Bodenöffnung zu erhalten. Es gibt also keinen konvexen Körper mit der vorgegebenen Konstellation in bezug auf die Zähligkeit.

In ähnlicher Weise kann man für das nächste Lösungstripel E_3 = 1, E_4 = 3 und E_5 = 3 zeigen, dass kein entsprechender konvexer Körper existiert.

Das dritte Lösungstripel E_3 = 0, E_4 = 5 und E_5 =2 liefert, wie man leicht durch Bauen zeigen kann, die pentagonale Dipyramide.

Das bedeutet, dass es nur einen Deltaeder mit F = 10 Flächen geben kann.

Entsprechend kann man für die anderen möglichen Flächenzahlen, also F = 4, 6, 8, 12, 14, 16, 20, beweisen, dass es aufgrund der Lösungen des Gleichungssystems I., ..., IV. sowie aufgrund entsprechender Bauversuche jeweils genau eine Ausprägung in Form eines bereits gefundenen konvexen Deltaeders geben kann.

Damit wäre gezeigt, dass es höchstens 8 konvexe Deltaeder geben kann.

Schlussbemerkung

Wie zu Beginn angedeutet, zeigt die vorliegende Arbeit nur einen kleinen thematischen Ausschnitt des Mathematik-Unterrichts. Viele Inhalte mussten unberücksichtigt bleiben. Die dargelegten Thesen und das Wechselspiel zwischen der Handlung auf der konkreten Ebene mit entsprechendenden Materialien und der Tätigkeit auf der abstrakten Ebene beim Auffinden und darstellen von Zusammenhängen sowie deren Beweis sind prinzipiell auch beim Einstieg in andere mathematische Gebiete umsetzbar.

Auf dem Gelände des Hegau-Jugendwerks befindet sich der **Mathematik-Garten**, in dem die fünf Platonischen Körper aufgestellt und sogar „begehbar“ sind. Auch dies ist ein Stück Konkrete Mathematik. Ein Heft der Schriftenreihe zum Mathematik-Garten ist in Arbeit.

Quellen

Beutelspacher, A.: „In Mathe war ich immer schlecht …“, Verlag Vieweg, 1996

Cromwell, P.: Polyhedra, Cambridge University Press, 1997

Dehaene, S.: Der Zahlensinn, Birkhäuser Verlag, 1999, S. 163ff

Devlin, K.: Muster der Mathematik, Spektrum Akademischer Verlag, 1994

Euklid: Die Elemente, Verlag Harri Deutsch, 1996, Buch X, § 5, § 115a

Euler, Leonard: Elementa Doctrinae Solidorum, 1750

Fahr, Philipp [1]: Ist die Mathematik eine Geisteswissenschaft? 2005
http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~philfahr/forum2005/forum.html

Fahr, Philipp [2]: A. N. Whitehead über die Lehre der Mathematik, 2006
http://www.math.uni-bielefeld.de/~philfahr/download/

Fehringer, A.; Geist, P. [1]: Der Mathematikgarten der WBS, unveröffentl. Manuskript, 2006

Fehringer, A.[2]: Bauen mit „Polydron“, unveröffentl. Manuskript, 2006

Fehringer, A.[3]: Flächensätze am Dreieck, Volumen des allgemeinen Tetraeders, unveröffentl. Manuskript, 2007

Fehringer, A.[4]: Volumen der konvexen Deltaeder, unveröffentl. Manuskript, 2007

Gruß, D.; Spiegel, H.: Eine(r) schreibt die Lösung an, und alle schreiben ab... , Studierendenzeitschrift „Matik“ , SS 1994
http://math-www.uni-paderborn.de/~hartmut/Eigene_Texte/Uebungskonzept.pdf

Pederson, J.: Zitat auf S. 14, bei **Gutierrez, Antonio:**
http://www.gogeometry.com/math_geometry_quotes/index.html

Preiß, G. [1]: Ein System zur Simulation natürlicher Neuronennetze mit Beiträgen zum Aufbau einer Neurodidaktik, ZDM 92/3

Preiß, G. [2]: Die neurodidaktischen Grundlagen für das Projekt „Didaktische Träger für Zahlen“, 1995

Sandifer, Ed: How Euler did it, Part 1, MAA online 2004

Sandifer, Ed: How Euler did it, Part 2, MAA online 2004